Problemes lúdics/variats

16. Sumeu tots els nombres de la forma $\dfrac{1}{a_1\, a_2 \cdots a_k}$, a on $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ recorre totes les parts no buides del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Primera solució

A l'hora de dissenyar una estratègia per resoldre un problema com el de l'enunciat en el qual, efectivament trobem una forma de resoldre el sumatori proposat, la forma de la solució dependrà d'n, és convenient d'elaborar una petita taula pels primers valors d'n, per tal de veure si els resultats fets a ma ens suggereixen una fórmula tancada pel sumatori.

Per a $n = 1$, tenim $S(1) = 1$.

Per a $n = 2$, tenim $S(2) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} = 2$.

Per a $n = 3$, tenim $S(3) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Veiem que, reordenant-la, l'expressió anterior és igual a:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 2}\right) + \frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}.$$

Per a $n = 4$, seguint el mateix procés de reagrupació tindríem:

$$S(4) = S(3) + \frac{1}{4} \cdot S(3) + \frac{1}{4} = 3 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}.$$

La mateixa tasca d'elaborar aquesta petita taula porta en el seu si el **mètode** per resoldre efectivament el problema per inducció sobre n. La taula ens suggereix que $S(n) = n$, però al mateix temps ens proporciona la forma de demostrar aquest resultat. Al cap i a la fi el procediment anterior no fa altra cosa que validar un fet dintre del quefer matemàtic: quan se sap on volem arribar és més fàcil de cercar el camí que condueix a l'objectiu.

Volem demostrar que $S(n) = n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Demostració per inducció. Per a $n = 1$ la fórmula és trivialment certa.

Suposem-la certa per a $n = k-1$, és a dir, suposem que $S(k-1) = k-1$. Llavors tenim que $S(k)$ està formada per totes les sumes que contenia $S(k-1)$, més aquelles altres que resultarien d'afegir en el denominador el factor k a les anteriors més la fracció $\frac{1}{k}$. Això doncs:

$$S(k) = S(k-1) + \frac{1}{k} \cdot S(k-1) + \frac{1}{k} = k - 1 + \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k}.$$

Segona solució

Tanmateix, per aquest problema hi ha una forma de resolució més sintètica que permet d'arribar a la fórmula que hem demostrat de forma directa. Si considerem el polinomi normalitzat que té com a úniques arrels les fraccions unitàries

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{n},$$

llavors els coeficients k–èsims d'aquest polinomi estaran formats per les sumes de tots els productes possibles d'$(n-k)$ arrels del polinomi i, per tant, $S(n)$ no serà altra cosa que la suma de tots els coeficients del polinomi anterior, la qual cosa s'obté calculant el valor numèric del polinomi per a $x = 1$.

Resumint, si aquest polinomi l'anomenem $P_n(x)$, resulta que

$$P_n(x) = (x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(x+\frac{1}{n}\right).$$

Llavors

$$S(n) = P_n(1) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1} = n.$$

17. Demostreu que és impossible de recobrir un tauler d'escacs amb 31 fitxes de dominó col·locant-les de manera que una fitxa cobreixi exactament dues caselles, després d'haver suprimit les dues caselles que es troben a l'extrem d'una mateixa diagonal.

Solució

És un problema ben senzill. Cada fitxa cobreix una casella blanca i una casella negra. Cal doncs que hi hagi la mateixa quantitat de caselles blanques que de caselles negres. Però, si suprimim les dues caselles de l'extrem d'una diagonal, suprimim dues caselles del mateix color i trenquem la coincidència en el nombre de caselles.

18. Demostreu que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ no és sencer per a cap valor d'n.

Primera solució

Si 2^i és la màxima potència de 2 que apareix entre $1, 2, \ldots, n$, definim l'enter

$$q = 2^{i-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots,$$

on $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots$ és el producte de tots els imparells menors o iguals a n.

Considerem el producte

$$q\,S = q\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = a_1 + a_2 + \cdots + \frac{q}{2^i} + \cdots + a_n,$$

on a_j és un enter ja que q és múltiple de tots els denominadors excepte 2^i. Si S fos enter $q\,S$ també ho seria i q hauria de ser múltiple de 2^i, la qual cosa és absurda per construcció.

Segona solució

Només cal sumar

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i + 1} \cdots + \frac{1}{2^i + k},$$

amb $k < 2^i$. Aleshores el màxim común denominador dels denominadors és de la forma $2^i p_{i_1}^{k_1} \cdots p_{i_r}^{k_r}$, on cada p_{i_m} és un primer senar. Aleshores el denominador és de la forma $2^i \cdot M$, M senar, i el numerador és de la forma $2 \cdot N + 1$, ja que tots els numeradors són parells llevat el que correspon a $\frac{1}{2^i}$ que és precisament M.

19. (OI 1972) Demostreu que donat un conjunt de 10 números diferents de dues xifres (en el sistema decimal) sempre és possible de seleccionar dos subconjunts diferents els membres dels quals tinguin la mateixa suma.

Solució

El nombre de subconjunts propis que es poden formar és

$$\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}=$$

$$=2^{10}-2=1\,022.$$

Les possibles sumes dels elements d'aquests conjunts prenen valors entre 10 i $(91+92+\cdots+99)=855$ i per tant forçosament hi ha d'haver més d'un conjunt amb la mateixa suma.